DC-113

December-2017

B.Sc., Sem.-III

202 : Mathematics

(Linear Algebra-1)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) સંકેતો સામાન્ય પ્રથા મુજબ છે.

(2) **બધા** પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(3) દરેક પ્રશ્ન સમાન ગુણ ધરાવે છે.

1. (a) સાબિત કરો કે $\mathbb{R}^n$ એ સદિશોના સામાન્ય સરવાળા અને અદિશ ગુણાકાર હેઠળ સદિશ અવકાશ છે. 7

અથવા

સદિશ અવકાશના ઉપાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. જો $S = \{p \in P(\mathbb{R}) \,/\, p(x_0) = 0\}$, જ્યાં $P(\mathbb{R})$ એ $\mathbb{R}$ ઉપરની બહુપદીઓનો ગણ અને x_0 એ $\mathbb{R}$નું ચોક્કસ બિંદુ હોય, તો સાબિત કરો કે S એ $P(\mathbb{R})$ નો ઉપાવકાશ છે.

(b) જો U અને W એ સદિશ અવકાશ V ના ઉપાવકાશ હોય તો સાબિત કરો કે U + W એ Vનો ઉપાવકાશ છે અને $U + W = [U \cup W]$ થાય. 7

અથવા

જો S એ સદિશ અવકાશ Vનો ખાલી ન હોય, તેવો ઉપગણ હોય, તો સાબિત કરો કે [S] એ Sને સમાવતો નાનામાં નાનો ઉપાવકાશ છે.

Scanned by CamScanner

2. (a) જો U અને W એ સદિશ અવકાશ Vના સાન્ત પરિમાણ ધરાવતા બે ઉપાવકાશ હોય, તો સાબિત કરો કે

$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ 7

અથવા

જો $B = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$એ સદિશ અવકાશ Vની વિસ્તૃતિ હોય, તો સાબિત કરો કે નીચેની બે શરતો સમકક્ષ છે.

(i) $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ એ સુરેખ સ્વાયત ગણ છે.

(ii) જો $v \in V$ હોય, તો સ્વરૂપ $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ એ અનન્ય છે.

(b) (i) $\mathbb{R}^3$માં વિસ્તૃતિ ગણ $\{(1, -1, 2), (3, 5, 0), (2, 7, 1), (9, 4, 2)\}$ ધરાવતા ઉપાવકાશનો આધાર અને પરિમાણ શોધો. 7

(ii) $P_2(\mathbb{R})$ માં વિસ્તૃતિ ગણ $\{1, 1 + t, 2 + t^2\}$ ધરાવતા ઉપાવકાશનો આધાર અને પરિમાણ શોધો.

અથવા

જો $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (-1, 4, 1)\}$ હોય, તો સાબિત કરો કે B એ $\mathbb{R}^3$નો આધાર છે. અને આધાર B ની સાપેક્ષ સદિશ $x = (2, 0, -1)$ નો યામ સદિશ શોધો.

3. (a) કોટ્યાંક-શૂન્યાંક પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

અથવા

જો $T : U \to V$ એ સુરેખ પરિવર્તન હોય, તો સાબિત કરો કે

(i) T એ એક-એક હોય, તો અને તો જ $N(T) = \{\theta_U\}$

(ii) જો $[u_1, u_2, \ldots, u_n] = U$, તો $R(T) = [T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)]$.

Scanned by CamScanner

(b) જો $T : U \to V$ એ વ્યસ્ત સંપન્ન સુરેખ પરિવર્તન હોય, તો સાબિત કરો કે $T^{-1} : V \to U$ એ સુરેખ, એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય. તથા $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$; $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ માટે T^{-1} શોધો. જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો 7

અથવા

જો સુરેખ પરિવર્તન $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ એ $T(e_1) = (1, 1, 1)$, $T(e_2) = (1, -1, 1)$, $T(e_3) = (1, 0, 0)$, $T(e_4) = (1, 0, 1)$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય, તો T માટે કોટ્યાંક-શૂન્યાંક પ્રમેયની ચકાસણી કરો.

4. (a) જો $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ એ બધા $m \times n$ ક્રમના શ્રેણિકોનો ગણ હોય, તો સાબિત કરો કે $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ નો પરિમાણ $m \cdot n$ થાય. 7

અથવા

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો R^2 અને R^3 ના ક્રમશઃ આધાર $B_1 = \{(1, 2), (-2, 1)\}$ અને $B_2 = \{(1, -1, -1), (1, 2, 3), (-1, 0, 2)\}$ ને સંબંધિત શ્રેણિક Aનો સુરેખ પરિવર્તન શોધો.

(b) જો $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ એ $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + bx + cx^2 + dx^3$ થી વ્યાખ્યાયિત થતો સુરેખ પરિવર્તન હોય, તો $M_2(\mathbb{R})$ અને $P_3(\mathbb{R})$ ના પ્રમાણિત આધારોની સાપેક્ષે Tનો શ્રેણિક શોધો. 7

અથવા

શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ નો વિસ્તાર ગણ, શૂન્યાવકાશ, કોટ્યાંક તથા શૂન્યાંક શોધો.

Scanned by CamScanner

5. નીચેના કોઈપણ **સાત** પ્રશ્નોના જવાબ આપો : 14

(1) જો $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 . x_2 = 0\}$ હોય, તો શું A એ $\mathbb{R}^3$નો ઉપાવકાશ થાય ? સમર્થન આપો.

(2) જો $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ એ સુરેખ પરિવર્તન હોય, અને $r(T) = 3$ હોય, તો સાબિત કરો કે T એ એક-એક થાય.

(3) સદિશ અવકાશનો ઉપાવકાશ થવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરતો લખો.

(4) જો $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R} \right\}$ હોય, તો dim(S) શું થશે ?

(5) સદિશ અવકાશ $\mathbb{R}^2$ ના કોઈપણ બે આધાર આપો.

(6) જો શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ એ $n \times n$ ક્રમનો શ્રેણિક હોય કે જ્યાં $a_{ij} = 3, \forall i$ અને j થાય , તો Aનો શૂન્યાંક શોધો.

(7) $\mathbb{R}^3$ નો વિસ્તૃતિ ગણ $\{(-3, 0, 1), (1, 2, 1), (3, 0, 1)\}$ ધરાવતા ઉપાવકાશનું પરિમાણ આપો.

(8) જો $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ એ સુરેખ પરિવર્તન હોય, તો શું T વ્યાપ્ત થઈ શકે ? સમર્થન આપો.

(9) જો $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ એ $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b, b - c, c)$ થી વ્યાખ્યાયિત થતો સુરેખ પરિવર્તન હોય, તો N(T) શોધો.

Scanned by CamScanner

DC-113

December-2017

B.Sc., Sem.-III

202 : Mathematics

(Linear Algebra-1)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) Symbols are in usual notations.

(2) **All** the questions are compulsory.

(3) Each question carries equal marks.

1. (a) Prove that $\mathbb{R}^n$ is a vector space under vector addition and scalar multiplication of vectors. **7**

OR

Define subspace of a vector space. If $S = \{p \in P(\mathbb{R}) / p(x_0) = 0\}$, where $P(\mathbb{R})$ is set of all polynomials over $\mathbb{R}$ and x_0 is a fixed point of $\mathbb{R}$, then prove that S is a subspace of $P(\mathbb{R})$.

(b) If U and W are two subspaces of a vector space V, then prove that U + W is a subspace of V, and $U + W = [U \cup W]$. **7**

OR

Let S be a non empty subset of a vector space V, then prove that [S] is the smallest subspace of V containing S.

Scanned by CamScanner

2. (a) Let U and W be two subspaces of a finite dimensional vector space V, then prove that $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ 7

OR

Let $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ span vector space V, then prove that the following two conditions are equivalent.

(i) $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ is a linearly independent set.

(ii) If $v \in V$, then the expression $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ is unique.

(b) Find basis and dimension of the subspace spanned by set. 7

(i) $\{(1, -1, 2), (3, 5, 0), (2, 7, -1), (9, 4, 2)\}$ in $\mathbb{R}^3$.

(ii) $\{1, 1 + t, 2 + t^2\}$ in $P_2(\mathbb{R})$

OR

Let $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (-1, 4, 1)\}$. Prove that B is a basis of $\mathbb{R}^3$ and obtain co-ordinate vector of $x = (2, 0, -1)$ relative to ordered basis B.

3. (a) State and prove Rank-Nullity Theorem. 7

OR

Let $T : U \rightarrow V$ be a linear map. Prove that

(i) T is one-one if and only if $N(T) = \{\theta_U\}$

(ii) If $[u_1, u_2, \dots, u_n] = U$, then $R(T) = [T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)]$.

Scanned by CamScanner

(b) Let $T : U \to V$ be a nonsingular linear transformation. Then prove that $T^{-1} : V \to U$ is linear, one-one, and onto map.

For $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$; $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ find T^{-1} if exists. 7

OR

Let $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation defined by $T(e_1) = (1, 1, 1)$, $T(e_2) = (1, -1, 1)$, $T(e_3) = (1, 0, 0)$, $T(e_4) = (1, 0, 1)$. Verify Rank-Nullity Theorem.

4. (a) Let $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ be the set of all m × n types of matrices. Prove that the dimension of a vector space $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ is mn. 7

OR

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Find linear transformation associated with A relative to bases $B_1 = \{(1, 2), (-2, 1)\}$ and $B_2 = \{(1, -1, -1), (1, 2, 3), (-1, 0, 2)\}$ of R^2 and R^3 respectively.

(b) Let $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ be a linear transformation defined by $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Obtain Matrix of T with respect to standard bases of $M_2(\mathbb{R})$ and $P_3(\mathbb{R})$. 7

OR

Find the range, kernel, rank and nullity of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Scanned by CamScanner

5. Attempt any **seven** : **14**

(1) Let $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 x_2 = 0\}$ is A subspace of $\mathbb{R}^3$? Justify.

(2) Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation and $r(T) = 3$, then show that T is one-one.

(3) State necessary and sufficient condition to be a subspace of a vector space.

(4) Let $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R} \right\}$, then what is dim(S) ?

(5) Give any two bases of a vector space $\mathbb{R}^2$.

(6) Let matrix $A = [a_{ij}]$ be an $n \times n$ matrix such that $a_{ij} = 3, \forall i$ and j, then find nullity of A.

(7) What is dimension of the subspace of $\mathbb{R}^3$ spanned by $\{(-3, 0, 1), (1, 2, 1), (3, 0, 1)\}$?

(8) Let $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation. Can T be an onto ? Justify.

(9) Let $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation defined as

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b, b - c, c), \text{ then find } N(T).$$

Scanned by CamScanner