

AA-121

April-2019

B.Sc., Sem.-IV

CC-205 : Mathematics

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70]

- સૂચના :** (1) તમામ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.
 (2) સર્વત્ર સકેતો પ્રચલિત છે.
 (3) જમણી તરફના અંક જે તે પ્રશ્ન/પેટા પ્રશ્નોના ગુણભાર દર્શાવી છે.

1. (A) (1) સમૂહની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે સમૂહ G માં : 7
 (i) એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ અનન્ય હોય છે.
 (ii) વ્યસ્ત ઘટકનું અસ્તિત્વ અનન્ય હોય છે.
 (2) ગણ $G = R - \{-1\}$ ઉપર કિયા * ની વ્યાખ્યા ; $a * b = a + b + ab$ છે; $a, b \in R - \{-1\}$ તો સાબિત કરો કે * દ્વિક કિયા છે અને $(G, *)$ સમૂહ રહ્યે છે. 7
 અથવા
- (1) સમશેષ સંબંધની વ્યાખ્યા આપો. ધારો કે $n > 0$ નિયત પૂર્ણક સંખ્યા છે. સાબિત કરો કે n ને સાપેક્ષ સમશેષ સંબંધ સામ્ય સંબંધ છે.
 (2) ધન સંમેય સંખ્યાઓના ગણ Q_+ માં દ્વિક-કિયા * ની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે છે. $a * b = \frac{ab}{2}$, જ્યાં $a, b \in Q_+$. સાબિત કરો કે Q_+ આ દ્વિક-કિયા * હેઠળ એક સમૂહ છે.
- (B) કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો. 4
 (i) પૂર્ણક સંખ્યા $n > 0$ માટે ભાગાકાર વિધિનો પ્રમેય લખો.
 (ii) જો $G = \{1, -1, i, -i\}$ ચક્કિય સમૂહ હોય તો G ના દરેક ઘટકની કક્ષા જણાવો.
 (iii) R પરની અસંગાઠિત દ્વિક-કિયાનું ઉદાહરણ આપો.
2. (A) (1) સાંત સમૂહ G ના ઉપસમૂહ H માટે લાગ્યાં નું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
 (2) સાબિત કરો કે સમૂહ G ના સાંત અશૂન્ય ઉપગણ H માં જો G ની દ્વિક કિયા પણ H ની દ્વિક કિયા હોય તો H એ ઉપગણ છે. 7
 અથવા
- (1) જો H એ સમૂહ G નું ઉપસમૂહ છે, $x \in G$ માટે સાબિત કરો કે $x^{-1} H x = \{x^{-1} 4x : 4 \in H\}$ પણ G નું ઉપસમૂહ છે.
 (2) જો H_1 અને H_2 એ G નાં ઉપસમૂહો હોય તો સાબિત કરો કે $H_1 \cap H_2$ પણ G નાં ઉપસમૂહો છે. શું $H_1 \cup H_2$ હંમેશા G નું ઉપ સમૂહ થશે? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

(B) કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

4

(i) સાબિત કરો કે જો $a^2 = e \forall a \in G$ હોય તો G સમક્રમી છે.

(ii) યુલરના પ્રમેયનું વિધાન લખો અને યુલરનું ફિદેય સમજાવો.

(iii) જો $G = \langle a \rangle$ એ 10 કક્ષાનો ચક્કિય સમૂહ હોય તો સમૂહ G ના બધા જ ઉપસમૂહો લખો.

3. (A) (1) S_n માં પરસ્પર અલગ ચક્કોની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે S_n ના પરસ્પર બે અલગ ચક્કો સમક્રમી છે.

7

(2) $F, G \in S_6$ માટે, $f = (1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 2)$; $g = (1\ 2\ 4\ 3)(5\ 6)$ હોય તો (i) fg , (ii) gf , (iii) f^{-1} , (iv) fgf^{-1} , (v) fg^2 મેળવો.

6

અથવા

(1) નિયત ઉપસમૂહની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે H એ સમૂહ G નો નિયત ઉપસમૂહ હોય તો અને તો જ $a^H a^{-1} CH$ જ્યાં $a \in G$.

7

(2) $S = \{1, 2, 3\}$ પરના તમામ કમચયોની યાદી બનાવો તથા S_3 કોષ્ટક તૈયાર કરો.

6

(B) કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

4

(i) ચક્ક અને ફેરબદ્દીની વ્યાખ્યા આપો.

(ii) યુગ્મ અને અયુગ્મ ચક્કોની વ્યાખ્યા આપો.

(iii) બે ચક્કોના સંયોજનની વ્યાખ્યા આપો.

4. (A) (1) સમક્રપતાનું મૂળભૂત પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

7

(2) સાબિત કરો કે સમાન કક્ષાના કોઈપણ બે શાંત ચક્કિય સમૂહો એકરૂપ હોય છે.

6

અથવા

(1) સમક્રપતાના ગર્ભની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે સમક્રપતા $\phi : (G, 0) \rightarrow (G^{-1}, *)$ નો ગર્ભ k_ϕ એ સમૂહ G નો નિયત ઉપસમૂહ છે.

7

(2) સમૂહોની એકરૂપતાની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે બે સમૂહો વચ્ચેની એકરૂપતાનો સંબંધ સામ્ય સંબંધ રચે છે.

6

(B) કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

4

(i) સાબિત કરો કે ચક્કિય સમૂહ હંમેશા સમક્રમી હોય છે.

(ii) ડેલેના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(iii) વ્યાખ્યા આપો : એકાંતર સમૂહ અને અવયવ સમૂહ.

AA-121

April-2019

B.Sc., Sem.-IV**CC-205 : Mathematics****Time : 2:30 Hours]****[Max. Marks : 70**

- Instructions :**
- (1) All the questions are *compulsory*.
 - (2) Notations are usual everywhere.
 - (3) Figures on the right indicate marks of the questions/sub-questions.

1. (A) (1) Define a group. Prove that in a group G :
- (i) There exists unique identity in G , and
 - (ii) There exists unique inverse in G .
- (2) If $*$ is an operation defined as $a * b = a + b + ab$ for all $a, b \in G = \mathbb{R} - \{-1\}$, then show that $*$ is a binary operation and $(G, *)$ is a group. 7

OR

- (1) Define a congruence relation. Prove that "congruence relation". Prove that "congruence modulo n " is an equivalence relation on \mathbb{Z} , where $n > 0$ is an integer.
- (2) Show that the set of all positive rational numbers \mathbb{Q}_+ . Form G group under the composition defined by $a * b = \frac{ab}{2}$, where $a, b \in \mathbb{Q}_+$. 7

- (B) Answer any two of the following in short : 4
- (i) State division algorithm theorem for integer $n > 0$.
 - (ii) In a cyclic group $G = \{1, -1, i, -i\}$. Find order of each element of G .
 - (iii) Give an example of a non-associative binary operation on \mathbb{R} .

2. (A) (1) State and prove Lagrange's theorem for a sub-group H of a finite group G . 7
- (2) Prove that a finite non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if it is closed under multiplication. 7

OR

- (1) Show that $x^{-1} Hx = \{x^{-1} 4x; 4 \in H\}$ is a subgroup of G if $x \in G$ and H is a subgroup of G .
- (2) If H_1 and H_2 are two subgroups of G then prove that $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of G . Is $H_1 \cup H_2$ always subgroup of G ? Justify your answer.

(B) Answer any two of the following in short :

- (i) Prove that $a^2 = e$ for each element 'a' of a group G, then G is a commutative.
- (ii) State Euler's theorem and explain Euler's ϕ function.
- (iii) If $G = \langle a \rangle$ is a cyclic group of order 10, then obtain all subgroup of G.

3. (A) (1) Define disjoint cycles in S_n . Prove that any two disjoint cycles in S_n are commutative. 7

- (2) For $F, G \in S_6$ find (i) fg , (ii) gf , (iii) f^{-1} , (iv) fgf^{-1} , (v) fg^2 , where $F = (1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 2)$; $g = (1\ 2\ 4\ 3)(5\ 6)$. 6

OR

- (1) Define normal subgroup of G and prove that if H is a normal subgroup of a group G if and only if $a^H a^{-1} \subset H$ for each $a \in G$. 7
- (2) List all permutations on $S = \{1, 2, 3\}$ and prepare group table for S_3 . 6

(B) Answer any two of the following in short : 4

- (i) Define cycle and transposition.
- (ii) Define even and odd permutations.
- (iii) Define a product of two permutations.

4. (A) (1) State and prove the fundamental theorem of a homomorphism. 7

- (2) Prove that any two finite cyclic group of the same order are isomorphic groups. 6

OR

- (1) Define Kernel of a group homomorphism. Also prove that the Kernel k_ϕ of a homomorphism $\phi : (G, \circ) \rightarrow (G^{-1}, *)$ is a normal subgroup of G. 7
- (2) Define an isomorphism of a group. Prove that relation of isomorphism in the set of two groups is an equivalence relation. 6

(B) Answer any two of the following is short : 4

- (i) Prove that cyclic group is always commutative.
- (ii) State the Cayley's theorem.
- (iii) Define Alternative group and Quotient group.