

MU-110

March-2019

B.Sc., Sem.-IV**CC-204 : Mathematics****(Advanced Calculus-II)****Time : 2:30 Hours]****[Max. Marks : 70]**

સૂચના: (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(2) ઉત્તરવહીમાં ગ્રામ્યપત્રમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રમનો અંક લખવો.

(3) જમણી તરફનાં એક જે તે પ્રશ્નનો ગુણભાર દર્શાવિ છે.

1. (A) (i) પ્રુવીય યામ પદ્ધતિમાં રૂપાંતરીત કરીનો શોધો : $\int_0^1 \int_x^{1-\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$. 7

(ii) સંકલનનો કમ બદલો : $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dy dx$. 7

અથવા

(i) શોધો : $\iint_R xy dx dy$, જ્યાં $R = \{(x, y) / x \geq 0, y \leq 4, x^2 \leq y\}$. 7

(ii) યામ સમતલો અને સમતલ $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ દ્વારા ધેરાયેલ ઘનનું ઘનક્ષળ શોધો. 7

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ બે)

(i) શોધો : $\iint_0^1 x dy dx$

(ii) $\iint_R f(x, y) dx dy$ ની સંકલ સીમા શોધો, જ્યાં R એ રેખાઓ $y = 0, y = x, y = 2$ નું રીતે

ઘરાયેતા વિસ્તાર છે.

(iii) શોધો : $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$, જ્યાં $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$.

2. (A) (i) પ્રચલિત સ્કેટો મુજબ, સાબિત કરો કે $\sqrt{n} \sqrt{n + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \sqrt{2n}$. 7

(ii) જો $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ અને $|\bar{r}| = r$ હોય તો સાબિત કરો કે $\nabla^2 f(\bar{r}) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$ જ્યાં $f(r)$ એ r નું વિધેય છે. 7

અથવા

(i) બીટા - ગામા વિધેયોનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાની કિંમત મેળવો :

$$(i) \int_0^\infty \sqrt[4]{x} e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$(ii) \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^3} dx$$

(ii) જો ϕ એ અદીશ વિધેય અને $\bar{f} = f_1\bar{i} + f_2\bar{j} + f_3\bar{k}$ એ $D \subset \mathbb{R}^3$ ઉપર વિકલનીય સંદર્ભ વિધેય છે, તો સાબિત કરો કે $\operatorname{div}(\phi \bar{f}) = \phi \operatorname{div} \bar{f} + \bar{f} \cdot \operatorname{grad}(\phi)$. 7

(B) ટૂકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ બે)

(i) $\beta(m+1, n) + \beta(m, n+1) = \beta(m, n)$ સાબિત કરો. 4

(ii) ઓર્ડરનું સૂત્ર લખો અને $\left[\frac{1}{4} \left| \frac{3}{4} \right. \right]$ મેળવો.

(iii) બિંકુ (1, 1, 1) પર $\operatorname{Curl}(x^2\bar{i} + xyz\bar{j} - zx\bar{k})$ શોધો.

3. (A) (i) સ્ટોક્સનો પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. (6) 7

(ii) શોધો : $\int (x^2 + y^2) dx + (x + y) dy$, જ્યાં C એ શિરોબિંદુ ($\pm 1, \pm 1$) થી ઘેરાયેલા ચોરસની સીમા છે. 6

અથવા

(i) ગ્રીનનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

(ii) શોધો : $\iint_S \bar{f} \cdot n dS$, જ્યાં $\bar{f} = (x^3 - yz, -2x^2y, z)$ અને S એ $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a, z = a$ થી ઘેરાયેલા ચોરસ પેટીનું પૃષ્ઠ છે. 6

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ બે) 4

(i) રેખા $y = x^2$ ઉપર $(0, 0)$ થી $(1, 1)$ સુધી $\int x dx + y dy$ મેળવો.

(ii) ગાઉસના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(iii) પૃષ્ઠ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ નો અભિલંબ એકમ સહિત મેળવો.

4. (A) (i) સાબિત કરો કે સુરેખ આંશિક વિકલ સમીકરણ $Pp + Qq = R$ નો વ્યાપક ઉકેલ $F(u, v) = 0$ છે. જ્યાં F એ સ્વૈચ્છિક વિધેય છે, $p(x, y, z) = c_1$ અને $v(x, y, z) = c_2$ એ સમીકરણ $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ ના સુરેખ સ્વાયત્ત ઉકેલ છે. 7

(ii) સમીકરણ $z = F(xy) + G\left(\frac{x}{y}\right)$ માંથી વિધેય F અને G નો લોપ કરીને આંશિક વિકલ સમીકરણ મેળવો. 6

અથવા

(i) વ્યાપક ઉકેલ મેળવો : $(y + z)p + (z + x)q = (x + y)$. 7

(ii) સમીકરણ $x^2 + (y - a)^2 + z^2 = b^2$ માંથી a, b નો લોપ કરો અને $xp + yq = z$ નું સંપૂર્ણ સંકલ મેળવો. 6

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ બે)

(i) આંશિક વિકલ સમીકરણ $x^3 Z_{xy} - px + qy = 0$ ના કક્ષા અને પરીમાણ શોધો.

(ii) ઉકેલ લખો : $dx = dy = dz$

(iii) જો $x^2 + x + y - z = 0$ તો $p = \underline{\hspace{2cm}}$ અને $q = \underline{\hspace{2cm}}$.

Seat No. : _____

MU-110

March-2019

B.Sc., Sem.-IV

CC-204 : Mathematics (Advanced Calculus-II)

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70]

- Instructions :**
- (1) All questions are compulsory.
 - (2) Write the question number in your answer sheet as shown in the question paper.
 - (3) Figures to the right indicate marks of the question.

1. (A) (i) Evaluate $\int_0^1 \int_x^{1-\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$ by changing into polar co-ordinates. 7

(ii) Evaluate $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dy dx$ by changing the order of integration. 7

OR

(i) Evaluate $\iint_R xy dxdy$, where $R = \{(x, y) | x \geq 0, y \leq 4, x^2 \leq y\}$. 7

(ii) Find the volume of solid bounded by the co-ordinate planes and the plane

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

(B) Give the answer in brief : (any two) 4

(i) Evaluate : $\iint_0^1 x dy dx$

(ii) Find the limit of $\iint_R f(x, y) dx dy$, where R is bounded by $y = 0, y = x, y = 2$.

(iii) Evaluate $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$, when $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$.

2. (A) (i) In usual notations, prove that $\sqrt{n} \left[n + \frac{1}{2} \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \sqrt{2n}$. 7
 (ii) If $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ and $r = |\bar{r}|$ then prove that $\nabla^2 f(\bar{r}) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$,
 where $f(r)$ is a function of r . 7

OR

(i) Evaluate the following using beta-gamma functions : 7

$$(i) \int_0^\infty \sqrt[4]{x} e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$(ii) \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^3} dx$$

(ii) If ϕ is a scalar function and $\bar{f} = f_1\bar{i} + f_2\bar{j} + f_3\bar{k}$ is a differentiable vector
 point function on $D \subset R^3$, then prove that $\operatorname{div}(\phi\bar{f}) = \phi\operatorname{div}\bar{f} + \bar{f} \cdot \operatorname{grad}(\phi)$. 7

(B) Give the answer in brief : (any two) 4

(i) Show that $\beta(m+1, n) + \beta(m, n+1) = \beta(m, n)$.

(ii) Write the Euler's Formula and simplify $\left[\frac{1}{4} \left|\frac{3}{4}\right| \right]$.

(iii) Find $\operatorname{Curl}(x^2\bar{i} + xyz\bar{j} - zx\bar{k})$ at $(1, 1, 1)$.

3. (A) (i) State and prove the Stokes's theorem. 7

(ii) Evaluate $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x + y) dy$, where C is the boundary of the square having vertices $(\pm 1, \pm 1)$. 6

OR

(i) State and prove the Green's theorem. 7

(ii) Evaluate $\iint_S \bar{f} \cdot n dS$, where $\bar{f} = (x^3 - yz, -2x^2y, z)$ and S is the surface of

the cube with faces $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a, z = a$. 6

(B) Give the answer in brief. (any two). 4

(i) Evaluate $\int x dx + y dy$ over the line $y = x^2$ from $(0, 0)$ to $(1, 1)$.

(ii) Write the statement of the Gauss Theorem.

(iii) Find the unit normal vector of surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4. (A) (i) Prove that the general solution of the linear partial differential equation $Pp + Qq = R$ is $F(u, v) = 0$, where, F is an arbitrary function and $u(x, y, z) = c_1$ and $v(x, y, z) = c_2$ form a solution of the equations $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$. 7

(ii) Form a partial differential equation by eliminating the arbitrary function F and G from the equation $z = F(xy) + G\left(\frac{x}{y}\right)$. 6

OR

(i) Obtain the general solution of $(y + z)p + (z + x)q = (x + y)$. 7

(ii) Eliminate a, b from the equation $x^2 + (y - a)^2 + z^2 = b^2$ and obtain the general solution of $xp + yq = z$. 6

(B) Give the answer in brief. (Any two).

4

- (i) Find order and degree of partial differential equation $x^3 Z_{xy} - px + qy = 0$.
- (ii) Solve $dx = dy = dz$.
- (iii) If $x^2 + x + y - z = 0$, then $p = \underline{\hspace{2cm}}$ and $q = \underline{\hspace{2cm}}$.