Seat No. : 7021

MD-106

May-2018

B.Sc., Sem.-IV

CC-204 : Mathematics

(Advanced Calculus-II)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે. દરેકના ગુણ 14 છે.

(2) જરૂર જણાય ત્યાં ઉત્તર પ્રચલિત સંકેતોમાં મેળવો.

(3) ઉત્તરવહીમાં પ્રશ્નપત્ર તથા પેટાપ્રશ્નક્રમ પ્રશ્નપત્ર મુજબ જ લખો.

1. (a) $S \subset R^2$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f : S \to R$ સતત હોય, જે વક્રો $x = a$, $x = b$, $y = \phi(x)$ અને $y = \psi(x)$, વડે સિમિત હોય, જ્યાં ϕ અને ψ એ અંતરાલ [a, b] પર સતત હોય તથા $\psi(x) < \phi(x)$, $\forall x \in [a, b]$ તો, સાબિત કરો કે $\iint_S f dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f dx\right) dy$. 7

અથવા

સંકલ $\iint_S \sqrt{xy(1-x-y)}\, dx\, dy$ ને સમીકરણો $x + y = u$, $x = uv$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત નવા ચલો u, v માં રૂપાંતરિત કરો અને તેની કિંમત શોધો જ્યાં S એ XY – સમતલમાં આવેલ સુરેખાઓ $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ થી બંધ પ્રદેશ છે.

(b) સંકલ $\int_0^3 \int_{\sqrt{9-y^2}}^{y+6} f(x, y)\, dx\, dy$ નો ક્રમ બદલો. 7

અથવા

યામ સમતલો અને સમતલ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ વડે બંધ ઘનનું ઘનફળ શોધો.

Scanned by CamScanner

2. (a) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે $\beta(m, n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$. 7

અથવા

ગામા વિધેય માટેની ડુપ્લીકેશન સૂત્ર સાબિત કરો.

(b) જો $R = (x, y, z)$, $r = |R|$, હોય તો સાબિત કરો કે $\nabla^2 f(r) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$. 7

અથવા

સાબિત કરો કે $\int_0^1 x^6(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{5\pi}{256}$.

3. (a) સ્ટોકનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

અથવા

સંકલ $\oint_C (x^2y\,dx + xy^2\,dy)$ માટે ગ્રીનનું પ્રમેય ચકાસો. જ્યાં C એ વક્રો $y^3 = x^2$ અને $y = x$ વડે બંધ પ્રદેશની સીમા છે.

(b) ગૉસનું ડાયવર્જન્સ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી સંકલ $\iint_S (x^3 dydz + y^3\, dzdx + z^3\, dxdy)$ નું મૂલ્ય શોધો. જ્યાં S ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ નું પૃષ્ઠ છે. 7

અથવા

સંકલ $\iint_S f \cdot n\, dS$, નું મૂલ્ય શોધો, જ્યાં $f = (4xz, -y^2, yz)$ અને S એ બંધ ઘનાકાર આકૃતિ $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$ થી રચાતી સપાટીઓનું પૃષ્ઠ છે.

Scanned by CamScanner

4. (a) આંશિક વિકલ સમીકરણની વ્યાખ્યા આપો તથા આંશિક વિકલ સમીકરણના ઉકલે માટેની લાગ્રાન્જની પદ્ધતિનું વિધાન લખો અને તે પદ્ધતિનું વર્ણવો. **7**

અથવા

નીચેનાના વિધેયોના આંશિક વિકલ સમીકરણ મેળવો :

(1) $(1 + a^3)z^2 = 8(x + ay + b)^3$

(2) $z = x^2 + y^2 + f(xy)$

(b) આંશિક વિકલ સમીકરણ $y(x + z)\, p + (z^2 - 2zx - x^2)\, q = y(x - z)$ નો વ્યાપક ઉકેલ મેળવો. **7**

અથવા

આંશિક વિકલ સમીકરણ $x(2x + z^2)p + 2y(x + z^2)q = z^3$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

5. ગમે તે સાતના ટૂંકમાં જવાબ આપો : **14**

(1) જો $\beta(x, 2) = 1/3$ હોય તો x ની કિંમત શોધો.

(2) જો $\oint(Pdx + Qdy) = \iint_R UdR$ હોય તો U ની કિંમત લખો.

(3) સંકલ $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\, dx\, dy$ ની કિંમત શોધો.

(4) સંકલ : $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta}\, d\theta$ નું મૂલ્ય મેળવો.

(5) અદિશ બિંદુ વિધેય તથા સદિશ બિંદુ વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.

Scanned by CamScanner

(6) સાબિત કરો કે div (curl F) = 0; where $F = (f_1, f_2, f_3)$

(7) આંશિક વિકલ સમીકરણ $xz\,p - yz\,q = x^2 + y^2$ નું ગૌણ સમીકરણ મેળવો.

(8) ગૉસના ડાયવર્જન્સ પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(9) આંશિક વિકલ સમીકરણની કક્ષા અને ઘાતની વ્યાખ્યા આપો.

Scanned by CamScanner

Seat No. : ________________

MD-106

May-2018

B.Sc., Sem.-IV

CC-204 : Mathematics

(Advanced Calculus-II)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Note : (1) **All** questions are compulsory and carry **14** marks each.

(2) Give your answers in usual notations, (if necessary)

(3) Write question number and sub-question number in answer sheet according to the question paper.

1. (a) Let the function $f : S \to R$ be continuous on $S \subset R^2$ which is bounded by curves $x = a$, $x = b$, $y = \phi(x)$ and $y = \psi(x)$, where ϕ and ψ are continuous functions on $[a, b]$ such that $\psi(x) < \phi(x)$, $\forall x \in [a, b]$, then prove that $\iint\limits_S f dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f dy\right) dx$

$$= \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f dx\right) dy.$$ 7

OR

Transform the integral $\iint\limits_S \sqrt{xy(1-x-y)}\, dx\, dy$ into new variables u, v by equation $x + y = u$, $x = uv$ where S is the region bounded by lines $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ in XY – plane and hence evaluate the value of the integral.

Scanned by CamScanner

(b) Change the order of integration $\int_{0}^{3} \int_{\sqrt{9-y^2}}^{y+6} f(x, y)\, dx\, dy$. **7**

OR

Find the volume of solid bounded by the co-ordinate planes and the plane $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

2. (a) In usual notations prove that $\beta(m, n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$. **7**

OR

Derive Duplication Formula for Gamma Function.

(b) Prove that, if $R=(x, y, z)$, $r=|R|$, then $\nabla^2 f(r)=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$. **7**

OR

Prove that $\int_{0}^{1} x^6(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx=\frac{5\pi}{256}$.

3. (a) State and prove Stoke's theorem. **7**

OR

Verify Green's theorem for $\oint_C (x^2y\, dx + xy^2\, dy)$, where C is the curve defined by the boundary of the region bounded by $y^3 = x^2$ and $y = x$.

(b) Using Gauss's theorem of divergence find $\iint_S (x^3 dydz + y^3\, dzdx + z^3\, dxdy)$, where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **7**

OR

Scanned by CamScanner

Evaluate $\iint_S f \cdot n \, dS$, where $f = (4xz, -y^2, yz)$ and S is the surface of the faces of the cube bounded by $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$.

4. (a) Define partial differential equation. State Lagrange's equation for partial differential equation and discuss the method for solving it. 7

OR

Form the partial differential equation of

(1) $(1 + a^3)z^2 = 8(x + ay + b)^3$

(2) $z = x^2 + y^2 + f(xy)$

(b) Obtain the general solution of the partial differential equation 7

$y(x + z)\, p + (z^2 - 2zx - x^2)\, q = y(x - z)$.

OR

Find general solution of partial differential equation $x(2x + z^2)p + 2y(x + z^2)q = z^3$.

5. Answer in short : (any **seven**) 14

(1) If $\beta(x, 2) = 1/3$, then find the value of x.

(2) $\oint(Pdx + Qdy) = \iint_R U dR$, then write value of U.

(3) Find the value of $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\, dx\, dy$.

(4) Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta}\, d\theta$.

Scanned by CamScanner

(5) Define scalar point function and vector point function.

(6) Prove that div (curl F) = 0; where $F = (f_1, f_2, f_3)$

(7) Write the auxiliary equations of the partial differential equation $xz\,p - yz\,q = x^2 + y^2$.

(8) Write the statement of Gauss's theorem of divergence.

(9) Define order and degree of the partial differential equation.

Scanned by CamScanner