

**DC-113**

December-2017

B.Sc., Sem.-III

**202 : Mathematics**  
**(Linear Algebra-1)****Time : 3 Hours]****[Max. Marks : 70]****બુના :** (1) સકેતો સામાન્ય પ્રથા મુજબ છે.

(2) બધા પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(3) દરેક પ્રશ્ન સમાન ગુણ ધરાવે છે.

1. (a) સાબિત કરો કે  $\mathbb{R}^n$  એ સદિશોના સામાન્ય સરવાળા અને અદિશ ગુણાકાર હેઠળ સદિશ અવકાશ છે. 7**અથવા**

સદિશ અવકાશના ઉપાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. જો  $S = \{p \in P(\mathbb{R}) / p(x_0) = 0\}$ , જ્યાં  $P(\mathbb{R})$  એ  $\mathbb{R}$  ઉપરની બહુપદીઓનો ગણ અને  $x_0$  એ  $\mathbb{R}$ નું ચોક્કસ બિંદુ હોય, તો સાબિત કરો કે  $S$  એ  $P(\mathbb{R})$  નો ઉપાવકાશ છે.

(b) જો  $U$  અને  $W$  એ સદિશ અવકાશ  $V$  ના ઉપાવકાશ હોય તો સાબિત કરો કે  $U + W$  એ  $V$ નો ઉપાવકાશ છે અને  $U + W = [U \cup W]$  થાય. 7**અથવા**

જો  $S$  એ સદિશ અવકાશ  $V$ નો ખાલી ન હોય, તેવો ઉપગણ હોય, તો સાબિત કરો કે  $[S]$  એ  $S$ ને સમાવતો નાનામાં નાનો ઉપાવકાશ છે.

2. (a) જો  $U$  અને  $W$  એ સંદિશ અવકાશ  $V$ ના સાન્ત પરિમાણ ધરાવતા બે ઉપાવકાશ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

7

**અથવા**

જો  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  એ સંદિશ અવકાશ  $V$ ની વિસ્તૃતિ હોય, તો સાબિત કરો કે નીચેની બે શરતો સમકક્ષ છે.

(i)  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  એ સુરેખ સ્વાયત ગણ છે.

(ii) જો  $v \in V$  હોય, તો સ્વરૂપ  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  એ અનન્ય છે.

- (b) (i)  $\mathbb{R}^3$ માં વિસ્તૃતિ ગણ  $\{(1, -1, 2), (3, 5, 0), (2, 7, 1), (9, 4, 2)\}$  ધરાવતા ઉપાવકાશનો આધાર અને પરિમાણ શોધો.

7

- (ii)  $P_2(\mathbb{R})$  માં વિસ્તૃતિ ગણ  $\{1, 1+t, 2+t^2\}$  ધરાવતા ઉપાવકાશનો આધાર અને પરિમાણ શોધો.

**અથવા**

જો  $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (-1, 4, 1)\}$  હોય, તો સાબિત કરો કે  $B$  એ  $\mathbb{R}^3$ નો આધાર છે. અને આધાર  $B$  ની સાપેક્ષ સંદિશ  $x = (2, 0, -1)$  નો યાસુ સંદિશ શોધો.

3. (a) કોટ્યાંક-શૂન્યાંક પ્રમેય લાભો અને સાબિત કરો.

7

**અથવા**

જો  $T : U \rightarrow V$  એ સુરેખ પરિવર્તન હોય, તો સાબિત કરો કે

(i)  $T$  એ ઓક-ઓક હોય, તો અને તો  $N(T) = \{\theta_U\}$

(ii) જો  $[u_1, u_2, \dots, u_n] = U$ , તો  $R(T) = [T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)]$ .

2

- (b) जो  $T : U \rightarrow V$  ए व्यस्त संपन्न सुरेख परिवर्तन होय, तो साबित करो के  $T^{-1} : V \rightarrow U$  ए सुरेख, एक-एक अने व्याप्त थाय. तथा  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x); \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  माटे  $T^{-1}$  शोधो. जो अस्तित्व धरावे तो

7

### अथवा

जो सुरेख परिवर्तन  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ए  $T(e_1) = (1, 1, 1), T(e_2) = (1, -1, 1), T(e_3) = (1, 0, 0), T(e_4) = (1, 0, 1)$  वडे व्याख्यायित होय, तो  $T$  माटे कोट्यांक-शून्यांक प्रभेयनी चकासाणी करो.

4. (a) जो  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  ए बधा  $m \times n$  कमना श्रेणिकोनो गण होय, तो साबित करो के  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  नो परिमाण  $m \cdot n$  थाय.

7

### अथवा

जो  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  होय, तो  $\mathbb{R}^2$  अने  $\mathbb{R}^3$  ना कमशः आधार  $B_1 = \{(1, 2), (-2, 1)\}$  अने  $B_2 = \{(1, -1, -1), (1, 2, 3), (-1, 0, 2)\}$  ने संबंधित श्रेणिक  $A$ नो सुरेख परिवर्तन शोधो.

- (b) जो  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  ए  $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + b x + c x^2 + d x^3$  थी व्याख्यायित थतो सुरेख परिवर्तन होय, तो  $M_2(\mathbb{R})$  अने  $P_3(\mathbb{R})$  ना प्रभाणित आधारोनी सापेक्षे  $T$ नो श्रेणिक शोधो.

7

### अथवा

श्रेणिक  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  नो विस्तार गण, शून्यावकाश, कोट्यांक तथा शून्यांक शोधो.

5. નીચેના કોઈપણ સાત પ્રશ્નોના જવાબ આપો:

14

- (1) જો  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 \cdot x_2 = 0\}$  હોય, તો શું A એ  $\mathbb{R}^3$ નો ઉપાવકાશ થાય ? સમર્થન આપો.
- (2) જો  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  એ સુરેખ પરિવર્તન હોય, અને  $r(T) = 3$  હોય, તો સાબિત કરો કે T એ એક-એક થાય.
- (3) સંદિશ અવકાશનો ઉપાવકાશ થવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરતો લખો.
- (4) જો  $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R} \right\}$  હોય, તો  $\dim(S)$  શું થશે ?
- (5) સંદિશ અવકાશ  $\mathbb{R}^2$  ના કોઈપણ બે આધાર આપો.
- (6) જો શ્રેણિક A =  $[a_{ij}]$  એ  $n \times n$  કમનો શ્રેણિક હોય કે જ્યાં  $a_{ij} = 3, \forall i$  અને  $j$  થાય, તો Aનો શૂન્યાંક શોધો.
- (7)  $\mathbb{R}^3$  નો વિસ્તૃતિ ગણ {(-3, 0, 1), (1, 2, 1), (3, 0, 1)} ધરાવતા ઉપાવકાશનું પરિમાણ આપો.
- (8) જો  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  એ સુરેખ પરિવર્તન હોય, તો શું T વ્યાસ થઈ શકે ? સમર્થન આપો.
- (9) જો  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  એ  $T \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a+b, b-c, c)$  થી વ્યાખ્યાયિત થતો સુરેખ પરિવર્તન હોય, તો N(T) શોધો.

Seat No. : 10959

# DC-113

December-2017

B.Sc., Sem.-III

202 : Mathematics  
(Linear Algebra-1)

56

Time : 3 Hours]

[Max. Marks : 70

Instructions : (1) Symbols are in usual notations.

(2) All the questions are compulsory.

(3) Each question carries equal marks.

1. (a) Prove that  $\mathbb{R}^n$  is a vector space under vector addition and scalar multiplication of vectors.

7

OR

Define subspace of a vector space. If  $S = \{p \in P(\mathbb{R}) / p(x_0) = 0\}$ , where  $P(\mathbb{R})$  is set of all polynomials over  $\mathbb{R}$  and  $x_0$  is a fixed point of  $\mathbb{R}$ , then prove that  $S$  is a subspace of  $P(\mathbb{R})$ .

- (b) If  $U$  and  $W$  are two subspaces of a vector space  $V$ , then prove that  $U + W$  is a subspace of  $V$ , and  $U + W = [U \cup W]$ .

7

OR

Let  $S$  be a non empty subset of a vector space  $V$ , then prove that  $[S]$  is the smallest subspace of  $V$  containing  $S$ .

2. (a) Let  $U$  and  $W$  be two subspaces of a finite dimensional vector space  $V$ , then prove that  $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

7

OR

Let  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  span vector space  $V$ , then prove that the following two conditions are equivalent.

(i)  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  is a linearly independent set.

(ii) If  $v \in V$ , then the expression  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  is unique.

- (b) Find basis and dimension of the subspace spanned by set.

7

(i)  $\{(1, -1, 2), (3, 5, 0), (2, 7, -1), (9, 4, 2)\}$  in  $\mathbb{R}^3$ .

(ii)  $\{1, 1+t, 2+t^2\}$  in  $P_2(\mathbb{R})$

OR

Let  $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (-1, 4, 1)\}$ . Prove that  $B$  is a basis of  $\mathbb{R}^3$  and obtain co-ordinate vector of  $x = (2, 0, -1)$  relative to ordered basis  $B$ .

3. (a) State and prove Rank-Nullity Theorem.

7

OR

Let  $T : U \rightarrow V$  be a linear map. Prove that

(i)  $T$  is one-one if and only if  $N(T) = \{\theta_U\}$

(ii) If  $[u_1, u_2, \dots, u_n] = U$ , then  $R(T) = [T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)]$ .

(b) Let  $T : U \rightarrow V$  be a nonsingular linear transformation. Then prove that

$T^{-1} : V \rightarrow U$  is linear, one-one, and onto map.

For  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ ;  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  find  $T^{-1}$  if exists.

7

**OR**

Let  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  be a linear transformation defined by  $T(e_1) = (1, 1, 1)$ ,

$T(e_2) = (1, -1, 1)$ ,  $T(e_3) = (1, 0, 0)$ ,  $T(e_4) = (1, 0, 1)$ . Verify Rank-Nullity Theorem.

4. (a) Let  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  be the set of all  $m \times n$  types of matrices. Prove that the dimension

of a vector space  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  is  $mn$ .

7

**OR**

Let  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ . Find linear transformation associated with  $A$  relative to bases

$B_1 = \{(1, 2), (-2, 1)\}$  and  $B_2 = \{(1, -1, -1), (1, 2, 3), (-1, 0, 2)\}$  of  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$  respectively.

(b) Let  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  be a linear transformation defined by

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + b x + c x^2 + d x^3$ . Obtain Matrix of  $T$  with respect to standard bases of  $M_2(\mathbb{R})$  and  $P_3(\mathbb{R})$ .

7

**OR**

Find the range, kernel, rank and nullity of the matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

5. Attempt any seven :

14

- (1) Let  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 x_2 = 0\}$  is A subspace of  $\mathbb{R}^3$ ? Justify.
- (2) Let  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  be a linear transformation and  $r(T) = 3$ , then show that T is one-one.
- (3) State necessary and sufficient condition to be a subspace of a vector space.
- (4) Let  $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R} \right\}$ , then what is  $\dim(S)$ ?
- (5) Give any two bases of a vector space  $\mathbb{R}^2$ .
- (6) Let matrix  $A = [a_{ij}]$  be an  $n \times n$  matrix such that  $a_{ij} = 3, \forall i$  and  $j$ , then find nullity of A.
- (7) What is dimension of the subspace of  $\mathbb{R}^3$  spanned by  $\{(-3, 0, 1), (1, 2, 1), (3, 0, 1)\}$ ?
- (8) Let  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  be a linear transformation. Can T be an onto? Justify.
- (9) Let  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  be a linear transformation defined as

$$T \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a+b, b-c, c), \text{ then find } N(T).$$