Seat No. : ______________

DB-107

December-2017

B.Sc., Sem.-III

201 : Mathematics

(Advanced Calculus – I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે. દરેકના ગુણ 14 છે.
(2) જરૂર જણાય ત્યાં ઉત્તર પ્રચલિત સંકેતોમાં મેળવો.
(3) ઉત્તરવહીમાં પ્રશ્નક્રમ તથા પેટાપ્રશ્નક્રમ પ્રશ્નપત્ર મુજબ જ લખો.

1. (a) સાબિત કરો : જો $\phi(x)$ એ $(a, \phi(a)) = (a, b)$ બિંદુએ સતત હોય અને $\lim\limits_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L \in R$ હોય, તો $\lim\limits_{x \to a} f(x, \phi(x))$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને તે L ની બરાબર થાય. 7

અથવા

(1) વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી કિંમત મેળવો : $\lim\limits_{(x, y) \to (2, 1)} \dfrac{2x + y}{3y - x}$

(2) વિધેય $f(x, y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{\sin x - \sin y}$, $\sin x \neq \sin y$
$= 2;$ $\sin x = \sin y$ ના બિંદુ (0, 0) એ સાતત્ય ચર્ચો.

(b) નીચેના વિધેયોના પુનરાવર્તિત લક્ષ મેળવો : 7

(1) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $(x, y) \neq (0, 0)$
$= 2,$ $(x, y) = (0, 0)$

(2) $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$
$= 4,$ $x = 4$, at (0, 1)

અથવા

નીચેના વિધેયોના લક્ષ મેળવો :

(1) $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{\tan(x + y)}{x + y}$

(2) $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \left(x \sin\dfrac{1}{y} + y \sin\dfrac{1}{x}\right)$

2. (a) જો અરિક્ત વિવૃત અંતરાલ $E \subset R^2$ ઉપર વ્યાખ્યાયીત વિધેય $z = f(x, y)$ વાસ્તવિક વિધેય હોય અને જો $f_x(x, y)$ અને $f_y(x, y)$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને $(x, y) \in E$ બિંદુએ સતત હોય તો 7

(1) વિધેય f એ $(x, y) \in E$ બિંદુએ વિકલનીય છે.

(2) $(x, y) \in E$ માટે $\delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\delta y + \varepsilon\rho$ જ્યાં $\varepsilon \to 0$ જ્યારે $\rho = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \to 0$.

અથવા

(1) જો $V = x^2 + 3xy + 2y^2$ હોય, તો $x V_x + y V_y$ ની કિંમત શોધો.

(2) વિધેય $U = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ માટે U_x, U_y, U_z શોધો.

(b) યંગનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

અથવા

(1) જો $x^x y^y z^z = c$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x = y = z$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -[x(1 + \log x)]^{-1}$; c અચળ સંખ્યા છે.

(2) જો $H = f(y - z, z - x, x - y)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $H_x + H_y + H_z = 0$.

3. (a) જેમનાં દ્વિતીય આંશિક વિકલિતો અસ્તિત્વ ધરાવે તેવા m ઘાતીય સમપરિમાણીય વિધેય $H = f(x, y)$ નું વિધેય $u = \phi(H)$ હોય તો સાબિત કરો કે 7

(1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = m\,\dfrac{F(u)}{F'(u)}$; $F'(u) \neq 0 = G(u)$ (say)

(2) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u)\,[G'(u) - 1]$, જ્યાં $H = f(x, y) = F(u)$.

અથવા

જો $u = f\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-x}{xz}\right)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + z^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

(b) (1) જો $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

(2) વિધેય $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ માટે સ્થાનનીય સ્થિરમૂલ્યો શોધો. 7

અથવા

એક ખુલ્લા ગણ $E \subset R^2$ પર વ્યાખ્યાયિત કોઈપણ વિધેય $f(x, y)$ ના બિંદુ (a, b) આગળ મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો મેળવવાની જરૂરી શરતો મેળવો.

4. (a) દ્વિચલ વિધેય માટેનું ટેઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

અથવા

વક્ર $y = f(x)$ની વક્રતા ત્રિજ્યા માટેનું સમીકરણ શોધો.

(b) વક્ર $f(x, y) = 0$ પરના દિક્‌બિંદુના અસ્તિત્વ માટેની આવશ્યક શરત તારવો. 7

અથવા

(1) વિધેય $f(x, y) = \log xy$ નું $(x - 1)$ અને $(y - 1)$ની ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો.

(2) વક્ર $r\theta = a$ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો.

5. નીચેનામાંથી કોઈપણ **સાત** પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : 14

(1) પુનરાવર્તિત લક્ષની વ્યાખ્યા આપો.

(2) જો $f(x, y) = x \log y + y \log x$ હોય, તો $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ની કિંમત શોધો.

(3) ગણ $S \subset R^n$ના લક્ષબિંદુની વ્યાખ્યા આપો.

(4) સમપરિમાણીય વિધેય $z = \dfrac{x^{2/3} + x^{1/3}\, y^{1/3}}{x^5 + y^5}$ ની ઘાત શોધો.

(5) સુરેખા $y = mx + c$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા શું થાય ?

(6) દ્વિચલ વિધેયના વિસ્તરણ માટેની ટેઈલરની શ્રેઢી લખો.

(7) દિક્ વિકલન $D_u f(x)$ શોધવાનું સૂત્ર લખો.

(8) xy નું સ્થાનનીય સ્થિર મૂલ્ય $x + y = 1$ શરત નીચે શોધો.

(9) દ્વિચલ વિધેયના વિકલનની વ્યાખ્યા આપો.

Seat No. : 10959

DB-107

December-2017

B.Sc., Sem.-III

201 : Mathematics
(Advanced Calculus – I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) All questions are compulsory and carry 14 marks each.
(2) Give your answers in usual notations, (if necessary).
(3) Write question number and sub-question number in answer sheet according to the question paper.

1. (a) Let function $\phi(x)$ is continuous at a point $(a, \phi(a)) = (a, b)$ and $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ exists and is equal to $L \in R$, then prove that $\lim_{x \to a} f(x, \phi(x))$ exists and is equal to L. **7**

OR

(1) Using definition evaluate : $\lim_{(x, y) \to (2, 1)} \frac{2x + y}{3y - x}$

(2) Discuss the continuity of $f(x, y) = \frac{\tan x - \tan y}{\sin x - \sin y}$; $\sin x \neq \sin y$
$= 2$; $\sin x = \sin y$ at point (0, 0).

(b) Find the iterated limits for the following functions : **7**

(1) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $(x, y) \neq (0, 0)$
$= 2$ $(x, y) = (0, 0)$

(2) $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$
$= 4$, $x = 4$ at (0, 1)

OR

Evaluate the following limits, if exists :

(1) $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{\tan(x + y)}{x + y}$

(2) $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \left(x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x}\right)$

2. (a) If $z = f(x, y)$ is a real function defined on non-empty open set $E \subset R^2$ and if $f_x(x, y)$ and $f_y(x, y)$ exist and continuous at point $(x, y) \in E$, then **7**

(1) The function f is differentiable at point $(x, y) \in E$.

(2) For $(x, y) \in E$, $\delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\delta y + \varepsilon\rho$ where $\varepsilon \to 0$ as $\rho = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \to 0$.

OR

(1) If $V = x^2 + 3xy + 2y^2$, then find the value of $x V_x + y V_y$.

(2) Find U_x, U_y, U_z for the function $U = \log(x^2 + y^2 + z^2)$.

(b) State and prove Young's theorem. 7

OR

(1) If $x^x y^y z^z = c$, then prove at $x = y = z$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -[x(1 + \log x)]^{-1}$; c is constant.

(2) If $H = f(y - z, z - x, x - y)$, then prove that $H_x + H_y + H_z = 0$.

3. (a) If $u = \phi(H)$ is a function of a homogeneous function $H = f(x, y)$ of degree m whose partial derivatives of second order exist, then 7

(1) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = m\frac{F(u)}{F'(u)}$; $F'(u) \neq 0 = G(u)$ (say)

(2) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u)\,[G'(u) - 1]$, where $H = f(x, y) = F(u)$.

OR

If $u = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$, then prove that $x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

(b) (1) If $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy}$, then prove that $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

(2) Find the extreme values of $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$. 7

OR

Derive the necessary conditions that the function $f(x, y)$ defined on an open set $E \subset R^2$ has Maximum and minimum values at a point (a, b).

4. (a) State and prove Taylor's theorem for the function of two variables. 7

OR

Derive the formula of radius of curvature for the curve $y = f(x)$.

(b) Derive a necessary condition for the existence of a double point on the curve $f(x, y) = 0$. 7

OR

(1) Expand $f(x, y) = \log xy$ in the power of $(x - 1)$ and $(y - 1)$.

(2) Find the radius of curvature of a curve $r\theta = a$.

5. Answer in short : (attempt any seven) 14

(1) Define iterated limits.

(2) If $f(x, y) = x \log y + y \log x$, then find the value of $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

(3) Define limit point of set $S \subset R^n$.

(4) Find the degree of the homogeneous function $z = \frac{x^{2/3} + x^{1/3}\, y^{1/3}}{x^5 + y^5}$.

(5) What is the curvature of a straight line $y = mx + c$?

(6) State the Taylor's theorem for expansion of function of two variables.

(7) Write the formula to find directional derivative $D_u f(x)$.

(8) Find the extreme value of xy under the condition $x + y = 1$.

(9) Define differentiation of function of two variables.